

КИНЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕТОДА ПАРАЛЛЕЛЬНОГО СБЛИЖЕНИЯ  
KINEMATIC MODEL OF THE PARALLEL APPROXIMATION METHOD

А. А. Дубанов<sup>1</sup>, Т. В. Аюшеев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Бурятский Государственный Университет, Улан-Удэ, Российская Федерация

<sup>2</sup>Восточно-Сибирский Государственный Университет Технологий и Управления, Улан-Удэ, Российская Федерация

A. A. Dubanov, T. V. Ausheev

<sup>1</sup>Buriat State University, Ulan-Ude, Russian Federation

<sup>2</sup>East Siberian State University of Technology and Management, Ulan-Ude, Russian Federation

**Аннотация** – В данной статье рассматривается модель задачи преследования методом параллельного сближения. Целью данной статьи является модификация метода параллельного сближения для того, чтобы учитывать случай, когда в момент начала преследования вектор скорости преследователя направлен не на цель. Кроме того, в рассматриваемой в статье модели, преследователь не может мгновенно изменять направление движения. То есть происходит наложение условия, что радиус кривизны траектории движения преследователя не может быть меньше определенной величины. Предлагаемый метод основан на том, преследователь, выбирая шаг на этапе итераций, будет стараться следовать прогнозируемым траекториям. По материалам статьи написана тестовая программа, которая рассчитывает траекторию преследователя, учитывая изложенные условия. Выполненное анимированное изображение визуализирует изменение координат преследователя, цели и прогнозируемых траекторий от времени.

**Ключевые слова** – цель, преследователь, траектория, сближение, моделирование.

### I. ВВЕДЕНИЕ

В описании задачи преследования методом параллельного сближения в трудах Петросяна Л. О. [1],[2], [3] направление вектора скорости преследователя  $P$  и направление вектора скорости цели  $T$  пересекаются в одной точке  $K$ , принадлежащей окружности Аполлония (Рис. 1).

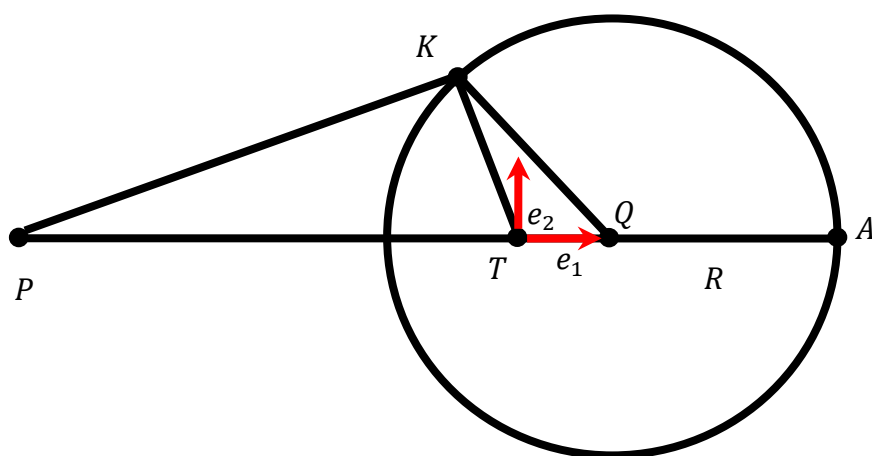


Рис. 1 Окружность Аполлония

Для точек  $P$  и  $T$  точка  $K$  окружности Аполлония характерна тем, отношение длин  $\frac{|PK|}{|QK|} = \frac{|V_P|}{|V_T|}$  есть отношение модулей скоростей преследователя и цели.

При квазидискретном моделировании точек траектории преследователя  $\{P_i\}$  можно предложить следующую итерационную схему (Рис. 2):

$$P_i = P_{i-1} + V_P \cdot \Delta T \cdot \frac{K_{i-1} - P_{i-1}}{|K_{i-1} - P_{i-1}|}$$

Радиус окружностей Аполлония будут такими:

$$R_i = \frac{V_T^2}{V_P^2 - V_T^2} \cdot |T_i - P_i|.$$

Центры окружностей Аполлония рассчитываются так:

$$Q_i = T_i + \frac{V_T^2}{V_P^2 - V_T^2} \cdot (T_i - P_i).$$

Координаты точки  $K_i$  есть продукт решения системы уравнений относительно непрерывного параметра  $t$ :

$$\begin{cases} (K_i - Q_i)^2 = R_i^2 \\ K_i = T_i + V_T \cdot \frac{T_{i+1} - T_i}{|T_{i+1} - T_i|} \cdot t \end{cases}$$

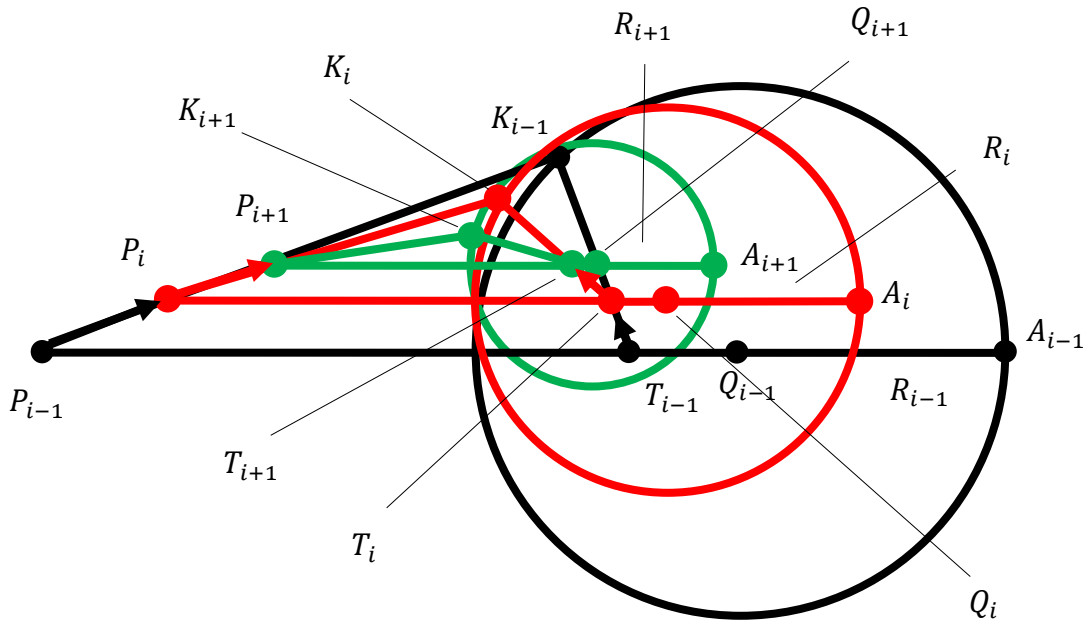


Рис. 2 – Итерационная схема

Такова одна из квазидискретных моделей построения траектории преследователя. Она требует, чтобы направления векторов движения преследователя и цели пересекались в точках, принадлежащим окружностям Аполлония.

## II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Если рассмотреть итерационную схему, представленную на рисунке 2, то мы видим что на каждом шаге итераций линии, соединяющие преследователя и цель ( $P_i T_i$ ), всегда параллельны между собой. В источниках [2], [3] приводится доказательство этого факта. Но мы приведем его здесь.

Рассмотрим отрезок  $[P_i, T_i]$ . Координаты точек  $P_1$  и  $T_1$  равны (Рис. 2):

$$P_i = P_{i-1} + V_P \cdot \frac{P_{i-1} K_{i-1}}{|P_{i-1} K_{i-1}|} \cdot \Delta T$$

$$T_i = T_{i-1} + V_T \cdot \frac{T_{i-1} K_{i-1}}{|T_{i-1} K_{i-1}|} \cdot \Delta T$$



Далее, находится центр окружности радиуса  $r_c$ :  $C_{i-1} = P_{i-1} + V_p \cdot \Delta T \cdot \vec{n}_{i-1}$ . К построенной окружности строится касательная из точки  $T_{i-1}$  для нахождения точки  $P_{t_{i-1}}$  сопряжения прямой и окружности (Рис. 4).

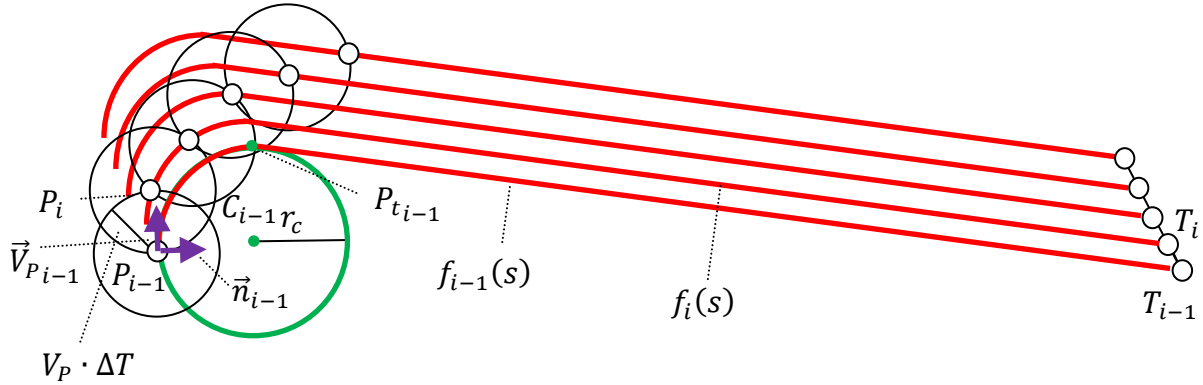


Рис. 4 – Квазидискретная модель параллельного сближения

Дугу окружности  $P_{i-1} \overline{P_{t_{i-1}}}$  и отрезок  $[P_{t_{i-1}} T_{i-1}]$  будем считать одной составной кривой линией  $f_{i-1}(s)$ , где параметром  $s$  служит длина дуги нашей параметрической кривой. Выбор в качестве параметра длины дуги вполне обоснован потому, что сегментами составной кривой могут служить не только отрезок прямой и дуги окружности, но и, к примеру, кривые Безье или кубические параболы.

Следует отметить, что в нашей тестовой программе, написанной по материалам статьи, отсчет длины дуги начинается от точки  $T_{i-1}$ ,  $f_{i-1}(0) = T_{i-1}$ .

Производим параллельный перенос линии  $f_{i-1}(s)$  на вектор  $T_i - T_{i-1}$ . Положение точки  $T_i$  известно и полностью определяется поведением цели. В рамках решения нашей задачи будем считать поведение цели полностью детерминированным.

Уравнение линии параллельной линии  $f_i(s) = f_{i-1}(s) + T_i - T_{i-1}$  будем считать известным и для нахождения точки  $P_i$  следующего шага преследователя, необходимо решение следующей системы уравнений и неравенств относительно параметра  $s$ :

$$\begin{cases} (f_i(s) - P_{i-1})^2 = (V_p \cdot \Delta T)^2 \\ f_i(s) = f_{i-1}(s) + T_i - T_{i-1} \\ 0 \leq s < s_{i-1} \end{cases}$$

Где  $s_{i-1}$  - это значение параметра  $s$ , соответствующее точке  $P_{i-1}$ .

#### IV. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

При реализации кинематической модели задачи преследования методом параллельного сближения был выбран пакет компьютерной математики MathCAD 15. Отметим некоторые особенности нашей тестовой программы.

Первое, что мы сделали в нашей программе, мы для составной кривой в момент начала преследования, состоящей из дуги и отрезка, выполнили параметризацию от длины дуги. Для этого нам необходимо было получить упорядоченный набор точек  $\{x_i, y_i\}$ . По каждой координате встроенными средствами MathCAD, выполнили кубическую сплайн-интерполяцию от формального параметра  $\delta$  и получили функции  $X(\delta), Y(\delta), i \in [0, N - 1], \delta_i \leq \delta \leq \delta_{i+1}$ , где  $\delta_i = i$ , а  $N$  - количество элементов массивов  $\{x_i, y_i\}$ .

Далее, был составлен Якобиан для передачи во встроенные решатели обыкновенных дифференциальных уравнений системы MathCAD:

$$D(s, \delta) = \frac{1}{\sqrt{\frac{dX^2}{d\delta} + \frac{dY^2}{d\delta}}}$$

Полученное решение методом Рунге-Кутты 4 порядка выражает зависимость массивов  $\{x_i, y_i\}$  от параметра длины дуги  $s$ . Таким образом, мы считаем, что уравнение базовой кривой, с которой мы будем совершать параллельный перенос, получено (Рис. 5).

Далее, нам предстоит создать вычислительный цикл, в котором решалась система уравнений и неравенств. Данная задача сводится к численному решению уравнения поиском нулей функции методом секущей в заданном диапазоне.

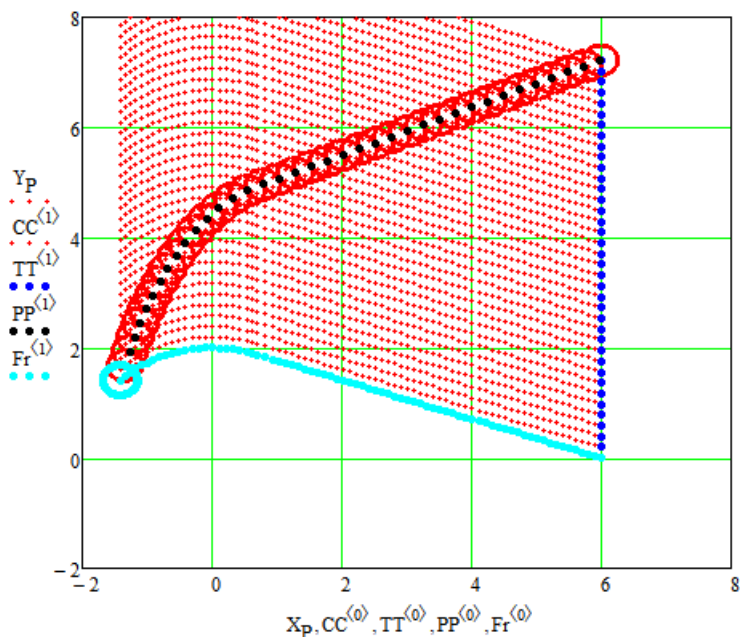


Рис. 5 Кинематическая модель параллельного сближения

Встроенные средства численного решения уравнений системы MathCAD позволяют это решить при помощи процедуры *root*. Процедурой *root* решается в вычислительном цикле уравнение:

$$(f_{i-1}(s) + T_i - T_{i-1} - P_{i-1})^2 - (V_p \cdot \Delta T)^2 = 0, \text{ в диапазоне } s \in [0, s_{i-1}].$$

На рисунке 5 представлены результаты моделирования тестовой программы. Рисунок 5 дополнен ссылкой на анимированное изображение, где в динамике можно будет посмотреть процесс методом параллельного сближения.

## V. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В нашей тестовой программе мы намеренно выбрали траекторию движения цели в виде прямой линии. В результатах этих экспериментов мы выяснили следующее. Если в начале движения, скорость преследователя направлена на точку на окружности Аполлония, то время достижения цели будет всегда меньше времени, если бы преследование выполнялось бы методом погони с теми же параметрами. В нашем случае, описываемый нами метод, не является оптимальным, но перспективность в плане группового преследования с разными скоростями из разных точек, но с одновременным достижением цели, несомненна.

## VI. ВЫВОДЫ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье рассматривается кинематическая модель задачи преследования на плоскости методом погони, когда в момент начала преследования скорость преследователя направлена не на цель.

Данный метод возможен для использования при разработке геометрической модели группового преследования с одновременным достижением цели или целей. Также возможно использование при разработке моделей, когда преследователь методом параллельного сближения достигает цели под заданными углами.

Данный метод моделирования задач преследования методом параллельного сближения может быть востребован при проектировании БПЛА с автономным управлением.

По предложенным моделям и алгоритмам написаны тестовые программы расчета траекторий в системе компьютерной математики MathCAD. Тексты программ доступны на ресурсе автора [12]. Ссылки на анимированное изображение, изготовленных по результатам работы программ доступны на ресурсе [11].

При написании статьи за основу приняты теоретические результаты, полученные в следующих источниках [1-4]. Также приняты во внимание результаты работ [5-10].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петросян Л. А. Дифференциальные игры преследования // Соросовский Образовательный Журнал. — 1995. — № 1.
2. Петросян Л. А., Рихсиев Б. Б. Преследование на плоскости. — Москва: «Наука», 1961. — (Популярные лекции по математике). — ISBN 5-02-014154-2.
3. Петросян Л. А., Рихсиев Б. Б. Преследование на плоскости. Изд-во Наука, 1991. — 94 с.
4. Айзекс Р. Дифференциальные игры. Москва: Мир, 1967.
5. Ахметжанов А. Р. Динамические игры преследования на поверхностях: автореферат диссертация на соискание учебной степени кандидата физико-математических наук. Москва, 2019. С. 28.
6. Измествев И. В., Ухоботов В. И. Задача преследования маломаневренных объектов с терминальным множеством в форме кольца. // Итоги науки и техн. Сер. Современ. Мат. и ее прил. Темат. Обз., 2018, том 148, С. 25-31.
7. Кузьмина Л. И., Осипов Ю. В. Расчет длины траектории для задачи преследования. // Вестник МГСУ, Москва, 2013. С. 20-26.
8. Саматов Б. Т. Задача преследования убегания при интегрально-геометрических ограничениях на управления преследователя. // Автомат. и телемех., 2013, выпуск 7, С. 17-28.
9. Романников Д. О. пример решения минимаксной задачи преследования с использованием нейронных сетей. // Сборник научных трудов НГТУ, №2 (92), Новосибирск, 2018., С. 108-116.
10. Ibragimov, G. Multi pursuer differential game of optimal approach with integral constraints on controls of players/G. Ibragimov, Norshakila Abd Rasid, A. Kuchkarov, F. Ismail//Taiwanese Journal of Mathematics. 2015. V. 19, • № 3. P. 963–976
11. Анимированное изображение «Метод параллельного сближения на плоскости с ограничениями на кривизну» <https://www.youtube.com/watch?v=qNXdykK21Z8>
12. Программный код в системе MathCAD представлен URL: <http://dubanov.exponenta.ru/books.htm>