

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРАЕКТОРИЙ ПРИ ОБХОДЕ ПРЕПЯТСТВИЙ
TRAJECTORY MODELING WHEN BYPASSING OBSTACLES

А. А. Дубанов¹, Т. В. Аюшеев²

¹Бурятский Государственный Университет, Улан-Удэ, Российская Федерация

²Восточно-Сибирский Государственный Университет Технологий и Управления, Улан-Удэ, Российская Федерация

A. A. Dubanov, T. V. Ausheev

1 Buriat State University, Ulan-Ude, Russian Federation

2 East Siberian State University of Technology and Management, Ulan-Ude, Russian Federation

Аннотация – В данной статье рассматриваются вопросы моделирования траекторий на плоскости и на поверхности, представленной точечным базисом. Препятствие моделируется на плоскости параметров и состоит из двух частей. Первая часть является областью, куда доступ запрещен. Вторая часть является областью искажения траектории, если бы препятствия не было. В статье рассматривается случаи моделирования траекторий до движущейся цели, с движущимися препятствиями и от движущегося объекта преследования. Все, предложенные в статье алгоритмы, реализованы в системе компьютерной математики MathCAD

Ключевые слова – преследование, уклонение, убежание, моделирование

DOI: устанавливается издательством

I. ВВЕДЕНИЕ

В данной статье используются теоретические положения задачи преследования, изложенные в работах Р. Айзекса [1], Л.С. Понтрягина [2], Н.Н. Красовского, А.И. Субботина [3]. Также используются результаты, полученные в работах Ю.Н. Желнина [4], С.В. Бурдакова, П.А. Сизова [5], Э.Н. Симаковой [6].

На плоскости или на поверхности передвигаются два объекта, участника задачи преследования. Объект преследования может двигаться по определенной траектории, а может двигаться в зависимости от характера движения преследуемого объекта. На участке плоскости или поверхности могут располагаться объекты, встречи с которыми следует избегать преследуемому объекту. Но возможны случаи, когда встречи с препятствиями следует избегать и объекту преследования. В этой связи становится актуальной задача автоматизированного проектирования предварительной траектории движения между преследующим объектом и объектом преследования. Такая траектория, предполагается, будет строиться в каждый момент времени. И в каждый момент времени, преследующий объект должен принимать решение, чтобы придерживаться такой траектории.

II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задачей исследования является создание математической модели препятствия, состоящей из двух областей, «поражения» и «искажения». Целью решения является разработка алгоритма автоматизированного построения траектории между двумя точками такой, чтобы она огибала (уклонялась) от области «поражения». Точки, между которыми строится траектория, могут двигаться по своим траекториям, также препятствие может совершать движение. Другими словами, ситуация в некоторой области пространства может быть изменчивой во времени и поведение объектов не зависит друг от друга. Реализация тестовых программ будет сделана в системе компьютерной математики MathCAD. Поскольку, мы имеем дело с динамическими объектами, все результаты будут снабжены ссылками на анимированные изображения.

III. ТЕОРИЯ

1. Моделирование препятствий

В данной статье мы будем считать, что на плоскости препятствие можно будет заключить в окружность определенного радиуса. Тогда нам из плоскости параметров необходимо будет исключить значения, которые попадают в окружность препятствия.

На плоскости параметров $(X \ Y)$ сформируем кусочно-гладкие непрерывные параметрические функции. Поскольку мы будем моделировать в системе компьютерной математики MathCAD, то нам необходимо задать сегмент плоскости $(X \ Y)$. Пусть это будет квадрат размерами $[0 \ 100] \times [0 \ 100]$.

$$L_{11}(u, C, r) = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$L_{12}(u, C, r) = \begin{cases} \begin{bmatrix} u \\ C_y \end{bmatrix} & \text{если } 0 \leq u \leq C_x - r \\ \begin{bmatrix} u \\ -\sqrt{r^2 - (u - C_x)^2} + C_y \end{bmatrix} & \text{если } C_x - r < u < C_x + r \\ \begin{bmatrix} u \\ C_y \end{bmatrix} & \text{если } C_x + r \leq u \leq 100 \end{cases}$$

$$L_{21}(u, C, r) = \begin{cases} \begin{bmatrix} u \\ C_y \end{bmatrix} & \text{если } 0 \leq u \leq C_x - r \\ \begin{bmatrix} u \\ \sqrt{r^2 - (u - C_x)^2} + C_y \end{bmatrix} & \text{если } C_x - r < u < C_x + r \\ \begin{bmatrix} u \\ C_y \end{bmatrix} & \text{если } C_x + r \leq u \leq 100 \end{cases}$$

$$L_{22}(u, C, r) = \begin{bmatrix} u \\ 100 \end{bmatrix}$$

В приведенных формулах $C = \begin{bmatrix} C_x \\ C_y \end{bmatrix}$ - это центр окружности, r - радиус окружности, u - параметр вдоль оси X от 0 до 100.

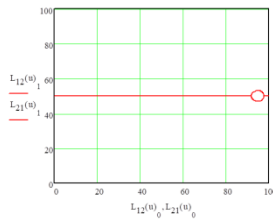


Рис. 1. Моделирование кусочно-гладких непрерывных линий

Результат моделирования линий представлен на рис. 1, этот рисунок дополнен ссылкой на анимированное изображение [9], где в динамике можно будет посмотреть движение линий. Теперь сформируем две полуплоскости.

$$S_1(u, v, C, r) = \frac{C_y - v}{C_y} \cdot L_{11}(u, C, r) + \frac{v}{C_y} \cdot L_{12}(u, C, r)$$

$$S_2(u, v, C, r) = \frac{100 - v}{100 - C_y} \cdot L_{21}(u, C, r) + \frac{v - C_y}{100 - C_y} \cdot L_{22}(u, C, r)$$

Сведем воедино две полуплоскости: $S_f(u, v, C, r) = \begin{cases} S_1(u, v, C, r) & \text{если } 0 \leq u \leq C_y \\ S_2(u, v, C, r) & \text{если } C_y < u \leq 100 \end{cases}$. На рис. 2 можно

посмотреть результат формирования плоскости без точек, попадающих в заданную окружность.

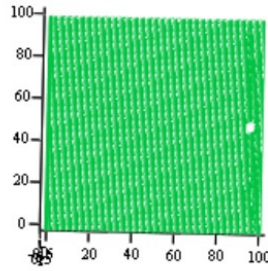


Рис. 2. Сегмент плоскости с отверстием

Добавим то, что рис. 2 дополнен ссылкой на анимированное изображение [10]. Можно в динамике посмотреть движение отверстия по сегменту плоскости.

Для примера, возьмем поверхность параболоида и разместим на ней отверстие.

$$P(u, v) = \begin{bmatrix} S_f(u, v, C, r)_x \\ S_f(u, v, C, r)_y \\ \frac{(S_f(u, v, C, r)_x - 50)^2 + (S_f(u, v, C, r)_y - 50)^2}{1000} + 5 \end{bmatrix}$$

На рис. 3 можно увидеть, как отверстие перемещается по поверхности параболоида. Рис. 3 дополнен ссылкой на анимированное изображение [11]. Кроме того, на ресурсе [8] размещен полный листинг программы с комментариями. Данная модель препятствий, как область определения, использует все пространство, в котором будут передвигаться участники задачи преследования. Если линейные размеры пространства намного превышают линейные размеры препятствий, тогда имеет смысл моделировать препятствия как локальные вкрапления, а представленную модель использовать в качестве средства визуализации. Способ моделирования отверстий также указан в источнике [7].

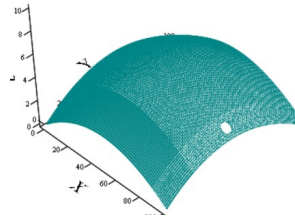


Рис. 3. Поверхность параболоида с отверстием

2. Локальное моделирование препятствий

Будем рассматривать препятствие, как объект, состоящий из двух частей. Области, куда доступ запрещен (область «поражения») и области искажения траекторий (область «искажения»). Если область «поражения» на плоскости представить в виде окружности определенного радиуса (рис. 4), то область «искажения» можно представить в виде квадрата определенных размеров.

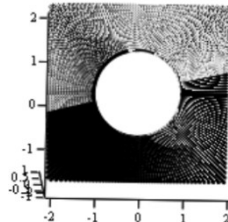


Рис. 4. Локальная модель препятствия

На рис. 4 область «поражения» представлена в виде окружности радиуса 1 с центром в начале координат. Окружность заключена в квадрат со стороной 4, центр квадрата совпадает с центром окружности. Параметризация сегмента плоскости (области «искажения») на рис. 4 полностью соответствует изложению во втором параграфе данной статьи. Но нам для расчета траектории необходимо получить иную параметризацию.

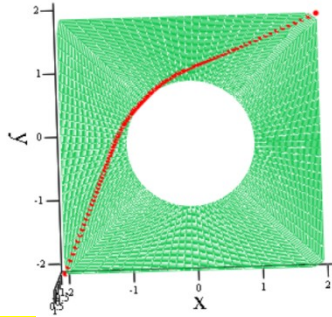


Рис. 5. Параметризация сегмента плоскости

Если точка единичной окружности (рис. 5) идентифицируется параметром t : $L_1(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}$, то следует поставить ей в соответствие точку квадрата, являющейся пересечением прямой, соединяющей центр окружности и точку $L_1(t)$, и линии квадрата. Другими словами, это есть точка:

$$L_2(t) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \cdot \operatorname{tg}(t) \end{bmatrix} & \text{если } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4} \\ \begin{bmatrix} \frac{2}{\operatorname{tg}(t)} \\ 2 \end{bmatrix} & \text{если } \frac{\pi}{4} < t \leq \frac{3\pi}{4} \\ \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \cdot \operatorname{tg}(t) \end{bmatrix} & \text{если } \frac{3\pi}{4} < t \leq \frac{5\pi}{4} \\ \begin{bmatrix} -2 \\ \frac{2}{\operatorname{tg}(t)} \end{bmatrix} & \text{если } \frac{5\pi}{4} < t \leq \frac{7\pi}{4} \\ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \cdot \operatorname{tg}(t) \end{bmatrix} & \text{если } \frac{7\pi}{4} < t \leq \frac{8\pi}{4} \end{cases}$$

Теперь мы сможем задать сегмент плоскости (рис. 5): $S(t, h) = (1-h) \cdot L_1(t) + h \cdot L_2(t)$. Рис. 5 дополнен ссылкой на анимированное изображение [12], где можно увидеть движение точки по локальному сегменту траектории.

Сегмент, что мы получили на рис. 5 можно вставить в любую поверхность вида $z = f(x, y)$, предварительно произведя новую параметризацию. Способ, предложенный в данном параграфе, позволяет выполнить не только расчет траектории, но и выполнить визуализацию препятствия.

3. Моделирование локального сегмента траектории

Рассмотрим внимательно Рис. 5. Поставим задачу построения траектории из нижнего угла квадрата в верхний правый угол квадрата. Это будет максимальный случай, когда наша траектория коснется, но не войдет в область «поражения». Хотя этот момент можно отрегулировать, задав больший радиус области «поражения».

Точки входа и выхода в квадрат соответствуют значениям параметра t : $t_1 = \frac{\pi}{4}$, $t_2 = \frac{5}{4}\pi$

Рассмотрим область определения функции $S(t, h) = (1-h) \cdot L_1(t) + h \cdot L_2(t)$. Это будет прямоугольник на плоскости (t, h) с размерами $[0 \ 2\pi] \times [0 \ 1]$.

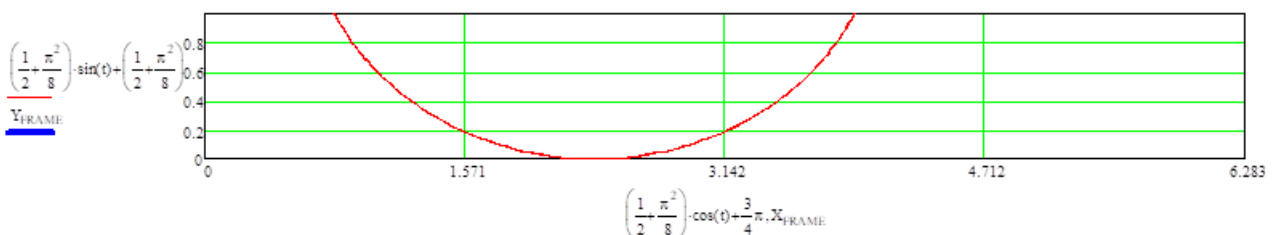


Рис. 6. Моделирование сегмента траектории

Отметим на этой области определения точки входа в наш квадрат $P_1 = \begin{bmatrix} t_1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $P_2 = \begin{bmatrix} t_2 \\ 1 \end{bmatrix}$ (рис. 6). Отметим прямую линию $p(t) = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}$. Построим окружность, проходящую через точки P_1 , P_2 и касающуюся прямой $p(t)$.

Это будет окружность радиуса $r = \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{8}$ и с центром в точке $C = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}\pi \\ \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{8} \end{bmatrix}$. То есть, реализуем механизм

построения окружности как в AutoCAD: «Точка, Точка, Касание». Таким образом, дуга окружности на рис. 6 определяется формулами:

$$t(\varphi) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{8}\right) \cdot \cos(\varphi) + \frac{3}{4}\pi, \quad h(\varphi) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{8}\right) \cdot \sin(\varphi) + \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{8},$$

где параметр φ принадлежит диапазону $\varphi \in \left[\arcsin\left(\frac{\frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{8}}{\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{8}}\right) \quad \pi - \arcsin\left(\frac{\frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{8}}{\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{8}}\right) \right]$.

Рис. 6 дополнен ссылкой на анимированное изображение [13], где точка дуги окружности пробегает от значения P_1 до значения P_2 .

Подстановка уравнений дуги окружности в уравнение сегмента плоскости приводит к уравнению локального сегмента траектории в области «искажения» $S(t(\varphi), h(\varphi))$. Траектория в области «искажения» изображена на Рис. 5.

Рис. 5 дополнен ссылкой на анимированное изображение [12], где точка траектории движется по области «искажения». Кстати, задавая прямую линию $p(t) = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}$, мы задали касание к области «поражения». Ординату

$p(t) = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}$ мы можем сами выбирать из диапазона $[0 \quad 1]$. Полный текст этой программы можно скачать на ресурсе [8].

4. Моделирование траекторий в мировой системе координат

При расчете траектории, мы предлагаем использовать следующую модель зоны «искажения». Это сегмент плоскости, заключенный между двумя концентрическими окружностями (рис. 7). Малая окружность - это окружность радиуса r , ограничивает область «поражения», с центром в точке $C = \begin{bmatrix} C_x \\ C_y \end{bmatrix}$ (Рис. 7). Окружность большего радиуса ограничивает область «искажения».

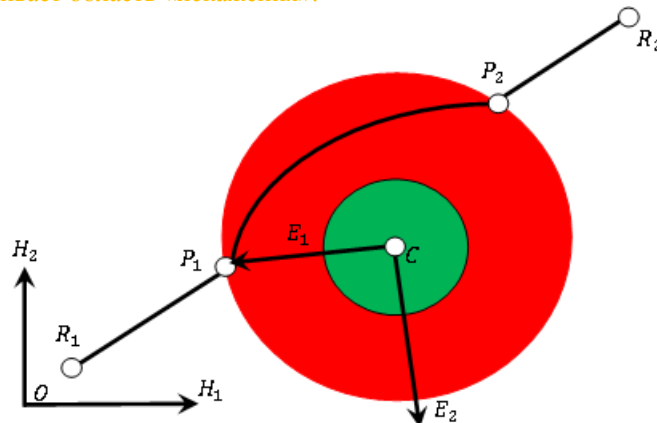


Рис. 7. Моделирование траектории в мировой системе координат

Для расчета траектории из точки R_1 в точку R_2 необходимо найти точки пересечения P_1, P_2 прямой $(R_1 \ R_2)$ с окружностью (C, r) . Это приводит к решению квадратного уравнения:

$$A_{eq} \cdot t^2 + B_{eq} \cdot t + C_{eq} = 0,$$

где коэффициентами являются:

$$A_{eq} = (R_2 - R_1) \cdot (R_2 - R_1)$$

$$B_{eq} = (R_2 - R_1) \cdot (R_1 - C)$$

$$C_{eq} = (R_1 - C) \cdot (R_1 - C) - r^2$$

Данное квадратное уравнение получается из решения системы уравнений относительно параметра t .

$$R(t) = (1-t) \cdot R_1 + t \cdot R_2$$

$$(R(t) - C) \cdot (R(t) - C) = r^2$$

Если дискриминант квадратного уравнения $D_{eq} = B_{eq}^2 - 4 \cdot A_{eq} \cdot C_{eq}$ меньше или равен 0, то траекторией будет прямая линия $(R_1 \ R_2)$. Если дискриминант больше 0, то траектория попадает в зону искажения. Решением нашего уравнения будут два значения t_1 и t_2 соответствующих точкам P_1 и P_2 на рис. 7. Случай мнимосопреженных корней квадратного уравнения соответствует тому, что прямая линия $(R_1 \ R_2)$ не пересекает окружности, ограничивающей область «искажения».

Далее следует перейти в локальный базис $(E_1 \ C \ E_2)$, образованный векторами (рис. 7):

$$E_1 = \frac{P_1 - C}{|P_1 - C|}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} -E_{1y} \\ E_{1x} \end{bmatrix}.$$

В системе координат $(E_1 \ C \ E_2)$ точка P_1 имеет координаты $\begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$, а точка P_2 выглядит так

$$P_2 = \begin{bmatrix} (P_2 - C) \cdot E_1 \\ (P_2 - C) \cdot E_2 \end{bmatrix}.$$

В локальной системе координат угол наклона к оси E_1 для точки P_1 будет 0, а для точки P_2 будет

$$\alpha = \begin{cases} \arccos\left(\frac{(P_2 - C) \cdot E_1}{|P_2 - C|}\right) & \text{если } \frac{(P_2 - C) \cdot E_2}{|P_2 - C|} \geq 0 \\ -\arccos\left(\frac{(P_2 - C) \cdot E_1}{|P_2 - C|}\right) & \text{если } \frac{(P_2 - C) \cdot E_2}{|P_2 - C|} < 0 \end{cases}.$$

Сегмент плоскости в системе координат $(E_1 \ C \ E_2)$ представим в виде

$$S(t, h) = (1-h) \cdot \begin{bmatrix} r_0 \cdot \cos(t) \\ r_0 \cdot \sin(t) \end{bmatrix} + h \cdot \begin{bmatrix} r \cdot \cos(t) \\ r \cdot \sin(t) \end{bmatrix},$$

где r_0 - радиус области «поражения», а r - радиус области «искажения».

Как и в предыдущем параграфе на плоскости параметров (t, h) с размерами $[0 \ 2\pi] \times [0 \ 1]$ отложим образы точек P_1, P_2 , это будут $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \end{bmatrix}$, соответственно. Теперь, используя механизм построения окружности «Точка, Точка, Радиус» проведем дугу окружности радиуса $\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{8}$. Центр такой окружности

будет находиться в точке $\begin{bmatrix} \frac{\alpha}{2} \\ 1 + \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{8}\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2} \end{bmatrix}$.

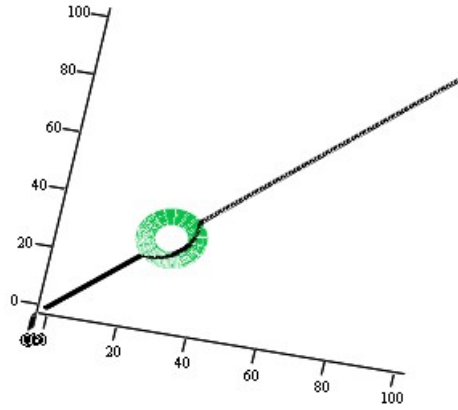


Рис. 8. Траектория в мировой системе координат

Точка будет пробегать на плоскости (t, h) сегмент траектории:

$$\begin{bmatrix} t(\gamma) \\ h(\gamma) \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{8} \right) \cdot \begin{bmatrix} \cos(\gamma) \\ \sin(\gamma) \end{bmatrix}, \text{ где } \gamma \in \left[-\arccos\left(\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{8} \right)^2 - \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2}}{\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{8}}} \right), \arccos\left(\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{8} \right)^2 - \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2}}{\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{8}}} \right) \right].$$

Полученный сегмент дуги:

$$S(t(\gamma), h(\gamma)) = (1 - h(\gamma)) \cdot \begin{bmatrix} r_0 \cdot \cos(t(\gamma)) \\ r_0 \cdot \sin(t(\gamma)) \end{bmatrix} + h(\gamma) \cdot \begin{bmatrix} r \cdot \cos(t(\gamma)) \\ r \cdot \sin(t(\gamma)) \end{bmatrix},$$

необходимо перевести в мировую систему координат $[H_1 \quad O \quad H_2]$ (рис. 7, рис. 8).

Перевод был сделан по формулам:

$$L(\gamma) = \begin{bmatrix} S(t(\gamma), h(\gamma)) \cdot q_1 \\ S(t(\gamma), h(\gamma)) \cdot q_2 \end{bmatrix} + C, \text{ где } q_1 = \begin{bmatrix} H_1 \cdot E_1 \\ H_1 \cdot E_2 \end{bmatrix}, q_2 = \begin{bmatrix} H_2 \cdot E_1 \\ H_2 \cdot E_2 \end{bmatrix}, H_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Рис. 8 дополнен ссылкой на анимированное изображение [14], в котором движутся препятствие и объекты, между которыми выстраивается траектория.

IV. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

По результатам проведенных исследований предложен алгоритм автоматизированного построения динамических траекторий обхода динамических препятствий. Модель препятствия предложено изображать в виде двух областей. Область «поражения» и область «искажения». Причем областью «искажения» может быть как окружность, так и квадрат.

V. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

ПОНИМАЕТСЯ ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТОВ!

Модель построения траекторий, предложенная в данной статье, рассматривает случаи, когда области «поражения» и «искажения» нескольких препятствий не пересекаются. Это можно рассматривать как отдельную тему для исследования. Также, в дальнейших исследованиях будет вводиться отдельная область «сглаживания» где сегменты траекторий будут стыковаться с определенной степенью гладкости.

VI. ВЫВОДЫ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье предлагаются модели и алгоритмы обхода препятствий. По предложенным моделям и алгоритмам написаны тестовые программы расчета траекторий в системе компьютерной математики MathCAD. С текстами программ можно ознакомиться на следующем ресурсе [8]. Кроме того, по результатам работы программ изготовлено несколько анимированных изображений, которые можно просмотреть в следующих источниках [9], [10], [11], [12], [13], [14]. Предполагается, что данные модели и алгоритмы построения траекторий могут быть использованы при разработке робототехнических комплексов, в моделях которых присутствуют элементы задачи преследования.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ. БЛАГОДАРНОСТИ

Работа была выполнена при поддержке проекта конкурса инновационных грантов Бурятского Государственного Университета 2019 г. на создание аппаратно-программного комплекса сопровождения.

Научный руководитель - Дубанов А.А.

Автор благодарит директора Института математики и информатики Бурятского Государственного Университета Антонову Ларису Васильевну за оказанную помощь и поддержку в исполнении гранта БГУ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М. : Мир, 1967.
2. Л. С. Понтрягин. Линейная дифференциальная игра убегания. Тр. МИАН СССР. 1971. Т. 112. С. 30–63.
3. Н.Н. Красовский, А.И. Субботин. Позиционные дифференциальные игры. М.- Наука, 1974 г.
4. Ю. Н. Желнин. Линеаризованная задача преследования и уклонения на плоскости // Ученые записки ЦАГИ. № 3. Т. 8. 1977. С. 88–98.
5. Бурдаков С. В., Сизов П. А. Алгоритмы управлением движения мобильным роботом в задаче преследования // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Информатика. Телекоммуникации. Управление. 2014. № 6 (210). С. 49–58.
6. Э.Н. Симакова. Об одной дифференциальной игре преследования // Автоматика и телемеханика. 1967. № 2. С. 5-14.
7. А.А. Дубанов. Конструирование базовых элементов формы и параметризация составных поверхностей // Информационные технологии. 2003 г., № 10, с. 42-51
8. Моделирование траекторий при обходе препятствий. URL: <http://dubanov.exponenta.ru> (дата обращения: 22.07.2019)
9. Моделирование промежуточных линий. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=ixNhGHaBXPu&feature=youtu.be> (дата обращения: 19.03.2019г)
10. Препятствие на плоскости определения. URL: <https://youtu.be/Uc4slgitOVw> (дата обращения: 19.03.2019г)
11. Препятствие на параболоиде. URL: <https://youtu.be/7xZAzy0wGc> (дата обращения: 19.03.2019г)
12. Движение по локальному сегменту траектории. URL: <https://youtu.be/gE7XZWIIgJE> (дата обращения: 19.03.2019г)
13. Моделирование сегмента траектории. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=lxKR3-tnIs4> (дата обращения: 19.03.2019г)
14. Траектория в мировой системе координат. URL: <https://youtu.be/11iZQaBxN1c> (дата обращения: 19.03.2019г)