Расчет кинематической схемы в системе компьютерной математики “MathCAD”

А.А. Дубанов
к.т.н., доцент, Сибирский Государственный Университет Телекоммуникаций и Информатики, e-mail: alandubanov@mail.ru

1. **Введение**

В данной статье предлагается рассмотреть алгоритм и методика расчета кинематических схем. Применяется в данном алгоритме метод решения систем нелинейных уравнений, описанный в работе [1] (метод Драгилева). Данная статья была написана после плодотворных дискуссий на форуме сайта exponenta.ru в топике под названием «Рычажные механизмы». Следует сразу отметить, что результаты, отображаемые в данной статье, далеко не единственные, поскольку много участников дискуссии проводили свои исследования. Наиболее полно метод решения ОДУ представлен в источнике [4]

2. **Постановка задачи**

Для демонстрации работы алгоритма расчета необходимо выбрать реальную кинематическую схему. Мы остановили выбор на схеме уборки шасси самолета-амфибии, (Рис.1). Рисунок был предоставлен на форуме Exponenta.ru В.Ф. Очковым (МЭИ, д.т.н., профессор).

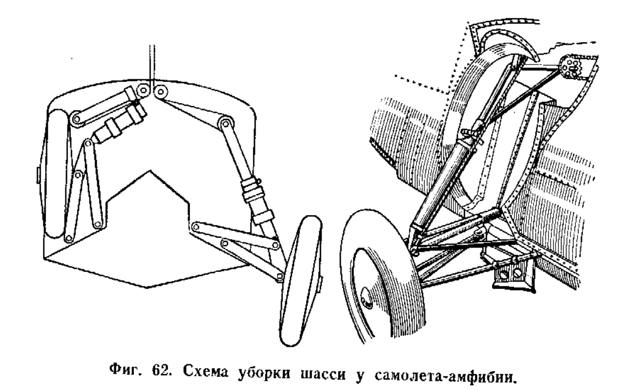


Рис. 1. Схема уборки шасси

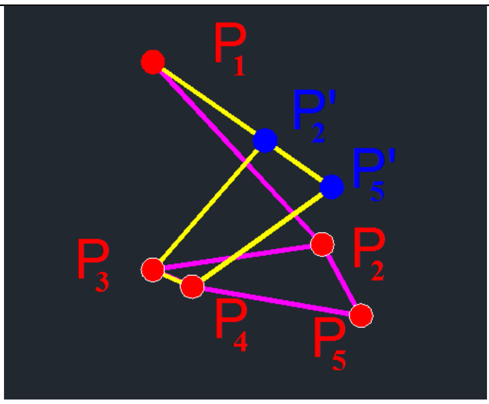


Рис. 2. Кинематическая схема

Мы немного упростили кинематическую схему (Рис.2). Расстояние $|P_1P_2|$ изменяется с постоянной скоростью. Точки P_1, P_3, P_4 закреплены неподвижно, точки P_2, P_5 изменяют свое положение в зависимости от расстояния $|P_1P_2|$. В нашей кинематической схеме примем следующее:

$$\begin{cases} |P_2 - P_1| = S(t) \\ |P_3 - P_2| = R_1 \\ |P_5 - P_4| = R_2 \\ |P_5 - P_2| = L \end{cases}, \qquad (1)$$

где R_1, R_2, L, а S изменяется линейно от времени t с постоянной скоростью v,
$S(t) = S_0 - v \cdot t$. $S(t) = S_0 - v \cdot t$.

3. Формализация задачи

Систему уравнений (1) для того, чтобы подвести под решение системы нелинейных уравнений методом Драгилева, необходимо подготовить следующим образом. Пусть абсцисса и ордината точки P_2 будут X_1 и X_2. Абсцисса и ордината точки P_5 будут X_3, X_4. Время будет $t = X_5$. Тогда система уравнений (1) приобретает следующий вид:

$$\begin{bmatrix} (X_1 - P_{1.x})^2 + \left(X_2 - P_{1,y}\right)^2 - S(X_5)^2 \\ (X_1 - P_{3.x})^2 + \left(X_2 - P_{3.y}\right)^2 - R_1^2 \\ \left(X_3 - P_{4,x}\right)^2 + \left(X_4 - P_{4,y}\right)^2 - R_2^2 \\ (X_1 - X_3)^2 + (X_2 - X_4)^2 - L^2 \end{bmatrix} = 0 \qquad (2)$$

Мы имеем систему уравнений (2) из 4 уравнений с 5 неизвестными. Далее, система (2) дифференцируется по формальному параметру T

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_1}\cdot\frac{dX_1}{dT} + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial X_5}\cdot\frac{dX_5}{dT} \\ \frac{\partial F_2}{\partial X_1}\cdot\frac{dX_1}{dT} + \cdots + \frac{\partial F_2}{\partial X_5}\cdot\frac{dX_5}{dT} \\ \frac{\partial F_3}{\partial X_1}\cdot\frac{dX_1}{dT} + \cdots + \frac{\partial F_3}{\partial X_5}\cdot\frac{dX_5}{dT} \\ \frac{\partial F_4}{\partial X_1}\cdot\frac{dX_1}{dT} + \cdots + \frac{\partial F_4}{\partial X_5}\cdot\frac{dX_5}{dT} \end{bmatrix} = 0, \text{ где } \begin{matrix} F_1 = (X_1 - P_{1.x})^2 + \left(X_2 - P_{1,y}\right)^2 - S(X_5)^2 \\ F_2 = (X_1 - P_{3.x})^2 + \left(X_2 - P_{3.y}\right)^2 - R_1^2 \\ F_3 = \left(X_3 - P_{4,x}\right)^2 + \left(X_4 - P_{4,y}\right)^2 - R_2^2 \\ F_4 = (X_1 - X_3)^2 + (X_2 - X_4)^2 - L^2 \end{matrix} \qquad (3)$$

В качестве одного из нетривиальных решений системы однородных линейных уравнений (3) относительно вектора переменных $\begin{bmatrix} \frac{dX_1}{dT} & \frac{dX_2}{dT} & \frac{dX_3}{dT} & \frac{dX_4}{dT} \end{bmatrix}^T$ предлагается следующее решение:

$$\begin{bmatrix} \frac{dX_1}{dT} \\ \frac{dX_2}{dT} \\ \frac{dX_3}{dT} \\ \frac{dX_4}{dT} \end{bmatrix} = -\left[\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial X_4} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_4}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial F_4}{\partial X_4} \end{pmatrix}\right]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_5} \\ \frac{\partial F_2}{\partial X_5} \\ \frac{\partial F_3}{\partial X_5} \\ \frac{\partial F_4}{\partial X_5} \end{bmatrix} \cdot \frac{dX_5}{dT} \qquad (4)$$

Если предположить, что $X_5 = T = t$, то система уравнений (4) приобретает законченный вид для передачи во встроенные решатели систем обыкновенных дифференциальных уравнений известных пакетов компьютерной математики.

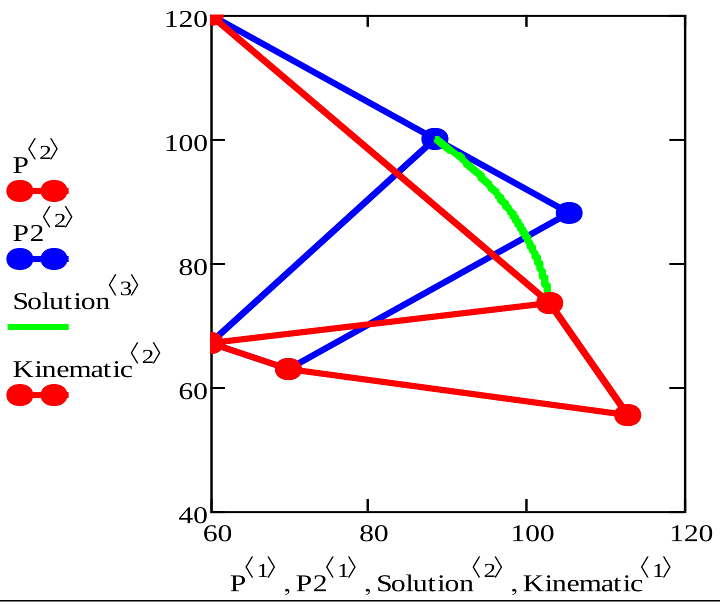
$$\begin{bmatrix} \frac{dX_1}{dt} \\ \frac{dX_2}{dt} \\ \frac{dX_3}{dt} \\ \frac{dX_4}{dt} \end{bmatrix} = -\left[\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial X_4} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_4}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial F_4}{\partial X_4} \end{pmatrix}\right]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial t} \\ \frac{\partial F_2}{\partial t} \\ \frac{\partial F_3}{\partial t} \\ \frac{\partial F_4}{\partial t} \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Если мы найдем численное решение системы уравнений (5), то это будет определение координат точек P_2 и P_5, при условии, что расстояние $|P_1P_2|$ будет сокращаться с постоянной скоростью v, в зависимости от времени t.

3. Реализация задачи в системе компьютерной математики «MathCAD»

Поскольку мы не обладаем информацией о реальных геометрических характеристиках схемы уборки шасси самолета-амфибии (Рис. 1), то мы позволили себе создать в системе «AutoCAD» чертеж (Рис. 2) с произвольными параметрами, схематически похожий на шасси самолета-амфибии. Далее, произведен импорт точек чертежа в два текстовых файла, отвечающих за начальное и конечное положение системы. В следующей таблице приводится программный код решения задачи расчета динамики рычажного механизма, указанного в Рис. 2.

Condition1 := READPRN("C:\WorkMathCAD\linkage\Cons1.txt") Condition2 := READPRN("C:\WorkMathCAD\linkage\Cons2.txt") ORIGIN := 1	Для корректной работы программы необходимо создать каталог с указанными файлами.
$\text{Condition1} = \begin{pmatrix} 60 & 120 & 0 \\ 103.0386 & 73.5891 & 0 \\ 60 & 67.1429 & 0 \\ 70 & 62.8571 & 0 \\ 112.8829 & 55.4453 & 0 \\ 103.0386 & 73.5891 & 0 \end{pmatrix} \quad P := \begin{pmatrix} 60 & 120 & 0 \\ 103.0386 & 73.5891 & 0 \\ 60 & 67.1429 & 0 \\ 70 & 62.8571 & 0 \\ 112.8829 & 55.4453 & 0 \\ 103.0386 & 73.5891 & 0 \end{pmatrix}$ $\text{Condition2} = \begin{pmatrix} 60 & 120 & 0 \\ 88.5192 & 100.0143 & 0 \\ 60 & 67.1429 & 0 \\ 70 & 62.8571 & 0 \\ 105.4126 & 88.1519 & 0 \\ 88.5192 & 100.0143 & 0 \end{pmatrix} \quad P2 := \begin{pmatrix} 60 & 120 & 0 \\ 88.5192 & 100.0143 & 0 \\ 60 & 67.1429 & 0 \\ 70 & 62.8571 & 0 \\ 105.4126 & 88.1519 & 0 \\ 88.5192 & 100.0143 & 0 \end{pmatrix}$	Начальное и конечное положение системы
$R_1 := \sqrt{\left(P_{3,1} - P_{2,1}\right)^2 + \left(P_{3,2} - P_{2,2}\right)^2} \quad R_1 = 43.519$ $R_2 := \sqrt{\left(P_{5,1} - P_{4,1}\right)^2 + \left(P_{5,2} - P_{4,2}\right)^2} \quad R_2 = 43.519$ $L := \sqrt{\left(P_{5,1} - P_{2,1}\right)^2 + \left(P_{5,2} - P_{2,2}\right)^2} \quad L = 20.642$ $S_0 := \sqrt{\left(P_{2,1} - P_{1,1}\right)^2 + \left(P_{2,2} - P_{1,2}\right)^2} \quad S_0 = 63.295$	Расчет геометрических характеристик чертежа (Рис. 2)
$V := 2 \quad S(t) := S_0 - V \cdot t$	Задание скорости сокращения расстояния $\lvert P_1 P_2 \rvert$
$F(X) := \begin{bmatrix} \left(X_1 - P_{1,1}\right)^2 + \left(X_2 - P_{1,2}\right)^2 - S\left(X_5\right)^2 \\ \left(X_1 - P_{3,1}\right)^2 + \left(X_2 - P_{3,2}\right)^2 - R_1^2 \\ \left(X_3 - P_{4,1}\right)^2 + \left(X_4 - P_{4,2}\right)^2 - R_2^2 \\ \left(X_1 - X_3\right)^2 + \left(X_2 - X_4\right)^2 - L^2 \end{bmatrix}$	Задание системы уравнений (2) $\begin{bmatrix} (X_1 - P_{1.x})^2 + \left(X_2 - P_{1,y}\right)^2 - S(X_5)^2 \\ (X_1 - P_{3.x})^2 + \left(X_2 - P_{3.y}\right)^2 - R_1^2 \\ \left(X_3 - P_{4,x}\right)^2 + \left(X_4 - P_{4,y}\right)^2 - R_2^2 \\ (X_1 - X_3)^2 + (X_2 - X_4)^2 - L^2 \end{bmatrix} = 0$
$\text{Jacobian}(X) := \text{Jacob}(F(X), X) \quad \begin{matrix} -2X_1 \; 120 & -2X_2 \; 240 & 0 & 0 & 253.18112816780005809 \; 8X_5 \\ -2X_1 \; 120 & -2X_2 \; 134.2858 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2X_3 \; 140 & -2X_4 \; 125.7142 & 0 \\ -2X_1 \cdot 2X_3 & -2X_2 \cdot 2X_4 & -2X_3 \cdot 2X_1 & -2X_4 \cdot 2X_2 & 0 \end{matrix}$	Вычисление матрицы (Якобиан) $\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial X_5} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_4}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial F_4}{\partial X_5} \end{bmatrix}$

$D(t,Y) := -\mathrm{submatrix}\left[\mathrm{Jacobian}\left(\left(\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ t \end{pmatrix}\right)\right),1,4,1,4\right]^{-1} \cdot \mathrm{submatrix}\left[\mathrm{Jacobian}\left(\left(\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ t \end{pmatrix}\right)\right),1,4,5,5\right]$	$\begin{bmatrix} \frac{dX_1}{dt} \\ \frac{dX_2}{dt} \\ \frac{dX_3}{dt} \\ \frac{dX_4}{dt} \end{bmatrix} = -\left[\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial X_4} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_4}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial F_4}{\partial X_4} \end{pmatrix}\right]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial t} \\ \frac{\partial F_2}{\partial t} \\ \frac{\partial F_3}{\partial t} \\ \frac{\partial F_4}{\partial t} \end{bmatrix}$
$Y_0 := \begin{pmatrix} P_{2,1} \\ P_{2,2} \\ P_{5,1} \\ P_{5,2} \end{pmatrix} \quad Y_0 = \begin{pmatrix} 103.039 \\ 73.589 \\ 112.883 \\ 55.445 \end{pmatrix}$	Вектор начальных данных
$\mathrm{Solution} := \mathrm{Rkadapt}\left(Y_0, 0, 14.235, 500, D\right)$	Встроенный решатель систем ОДУ методом Рунге-Кутта 4 порядка. Выдает решение в виде матрицы размерности $[501 \times 5]$. Промежуток времени $t = [0; 14.235]$ равномерно делится на 500 интервалов, $[t \quad X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad X_4]$.
$\mathrm{Kinematic} := \begin{bmatrix} 60 & 120 & 0 \\ \left(\mathrm{Solution}^{\langle 2\rangle}\right)_{\mathrm{FRAME}+1} & \left(\mathrm{Solution}^{\langle 3\rangle}\right)_{\mathrm{FRAME}+1} & 0 \\ 60 & 67.1429 & 0 \\ 70 & 62.8571 & 0 \\ \left(\mathrm{Solution}^{\langle 4\rangle}\right)_{\mathrm{FRAME}+1} & \left(\mathrm{Solution}^{\langle 5\rangle}\right)_{\mathrm{FRAME}+1} & 0 \\ \left(\mathrm{Solution}^{\langle 2\rangle}\right)_{\mathrm{FRAME}+1} & \left(\mathrm{Solution}^{\langle 3\rangle}\right)_{\mathrm{FRAME}+1} & 0 \end{bmatrix}$	Точечная система $[P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4 \quad P_5 \quad P_1]^T$ В движении, зависимость от времени, в нашем случае время отображает переменная FRAME (кадр).
	Итоговый результат работы программы. Число кадров 500.

По ссылке [2] можно просмотреть анимированное изображение в зависимости от времени. Скачать текст программы в системе компьютерной математики «MathCAD 15» можно по следующей ссылке [3]

[1] Элетронный журнал «Прикладная Геометрия»

http://www.apg.mai.ru/Volume9/Number19/vol9num19_1.pdf

http://www.apg.mai.ru/Volume9/Number19/duban919.pdf

[2] http://www.youtube.com/watch?v=bsMJk10KN4M

[3]http://dubanov.exponenta.ru . Вкладка «Статья «Рычажные механизмы»»

[4] http://malplab.ru/invitation_to_the_scientific_debate/